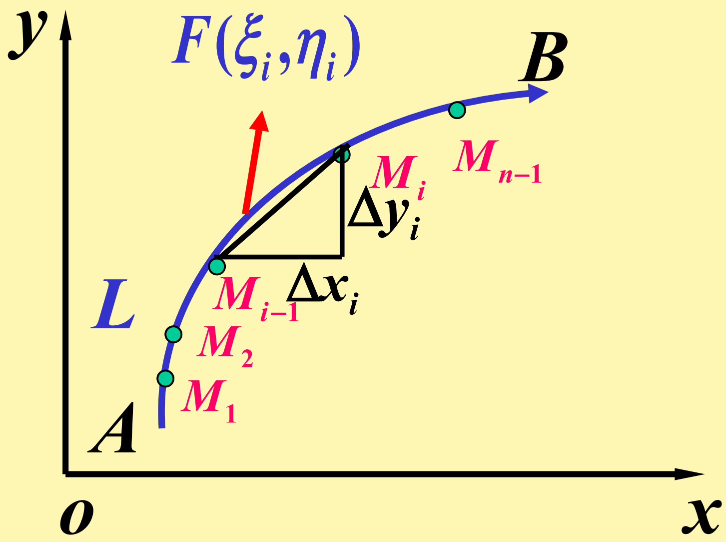
9.1.2 对坐标的曲线积分

1. 引例 $L: A \to B,$

$$F(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

常力所作的功 $W = F \cdot \overrightarrow{AB}.$

如何求变力沿曲线作功？



分割 $A = M_0, M_1(x_1,y_1), \cdots, M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}), M_n = B$

取 $F(\xi_i,\eta_i) = \{P(\xi_i,\eta_i), Q(\xi_i,\eta_i)\}$

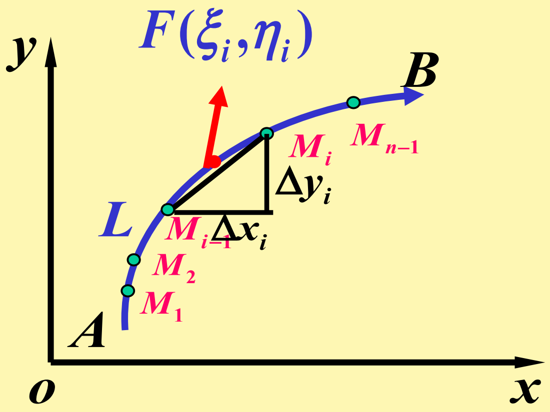
点M_{i-1} (x_{i-1},y_{i-1}), 点M_i (x_i,y_i)

$$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$$

$$\Delta W_i \approx F(\xi_i,\eta_i)\cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i},$$

$$=\{P(\xi_i,\eta_i),Q(\xi_i,\eta_i)\}\cdot\{\Delta x_i,\Delta y_i\}$$

$$=P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$



求和 $W=\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i].$$

取极限 $W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i].$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i$$

定义

设L为xoy面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，函数$P(x,y)$, $Q(x,y)$在L上有界. 用L上的点$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $\cdots$, $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$把L分成n个有向小弧段

$M_{i-1}M_i\ (i=1,2,\cdots,n)$; $M_0=A$, $M_n=B$.

设$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, 点$(\xi_i,\eta_i)$为$M_{i-1}M_i$上任意取定的点. 如果当各小弧段长度的最大值$\lambda \to 0$时,

$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$的极限存在，则称此极限为函数$P(x,y)$在有向曲线弧$L$上对坐标$x$的曲线积分(或称第二类曲线积分)，记作

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i .$$

类似地定义 $\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i .$

其中$P(x,y)$，$Q(x,y)$叫做被积函数，L叫积分弧段.

2. 存在条件：当$P(x,y)$，$Q(x,y)$在光滑曲线弧 L 上连续时，第二类曲线积分存在

组合形式 $\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$

$$= \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_L \{P, Q\} \cdot \{dx, dy\}$$

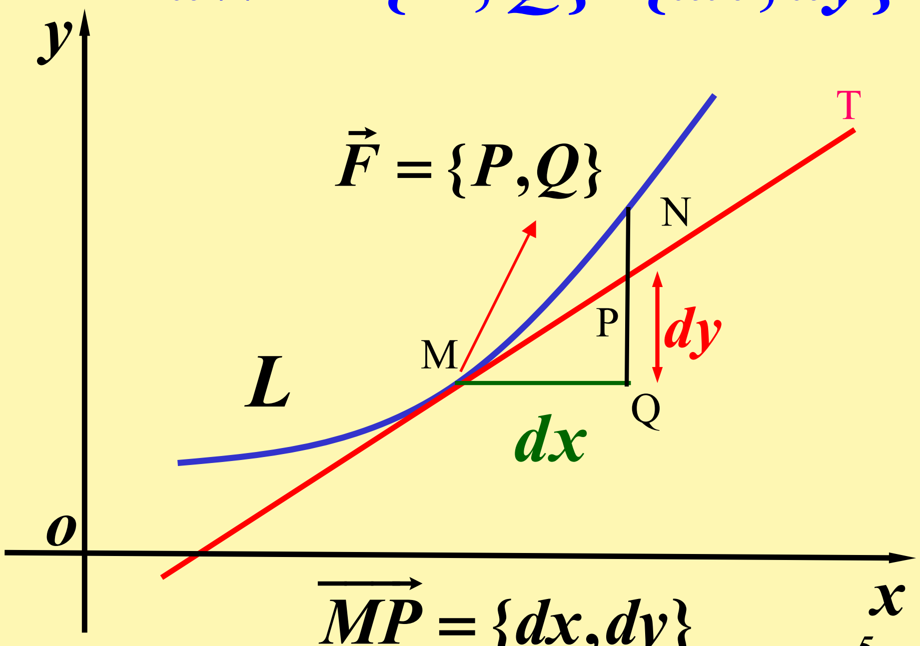
$$dW = \{P, Q\} \cdot \{dx, dy\}$$

$$= \int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

记 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$,

$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

（有向曲线元）



推广　空间有向曲线弧 Γ

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

$$=\int_\Gamma \{P,Q,R\}\cdot\{dx,dy,dz\}$$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i.$$

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i.$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

5. 性质

(1) 如果把有向曲线L分成同方向的曲线L_1和L_2, 则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1} Pdx+Qdy+\int_{L_2} Pdx+Qdy.$$

(2) 设L是有向曲线弧,记$-L$或L^-是与L方向相反的有向曲线弧, 则

$$\int_{-L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

即对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

2. 对坐标的曲线积分的计算

定理 设$P(x,y),Q(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为$\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ 当参数t单调地由α变到β时，点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B，$\phi(t),\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且$\phi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分

$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$存在，

且$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad \begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

计算方法：化为对参数的定积分，

“一代二换三定限”

“定限”：α,β 对应于L的起点、终点，不一定有 $\alpha<\beta$ 。

特殊情形

(1) $L: y=y(x)$ $\qquad x$起点为a，终点为b.

则 $\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}dx.$

(2) $L: x = x(y)$ $\quad$ y起点为c，终点为d.

则 $\int_L Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$

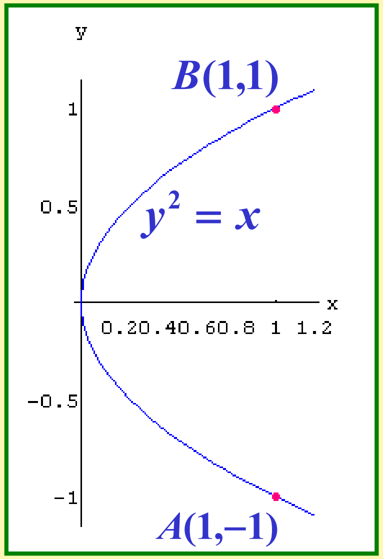
(3) 推广 $\quad \Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t) \end{cases}$ $\quad t$起点α,终点β.

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+ R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2=x$上从 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



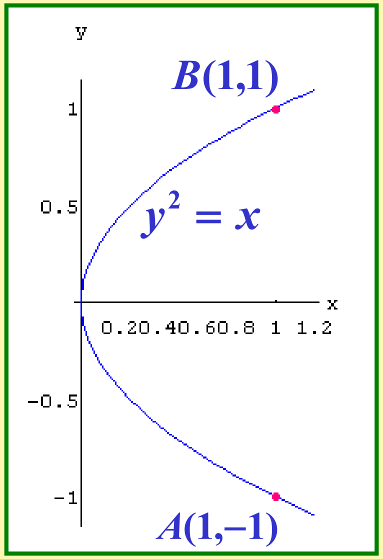
解法一 化为对x的定积分, $y=\pm\sqrt{x}$.

$$\int_L xydx=\int_{AO} xydx+\int_{OB} xydx$$

$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx+\int_0^1 x\sqrt{x}dx$$

$$=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx \quad =\frac{4}{5}.$$

例1 计算$\int_L xydx$,其中L为抛物线 $y^2 = x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧.



解法二：化为对y的定积分,

$$x = y^2, \qquad y\text{从}-1\text{到}1.$$

$$\int_L xydx = \int_{AB} xydx$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2 y(y^2)'dy = 2\int_{-1}^{1} y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

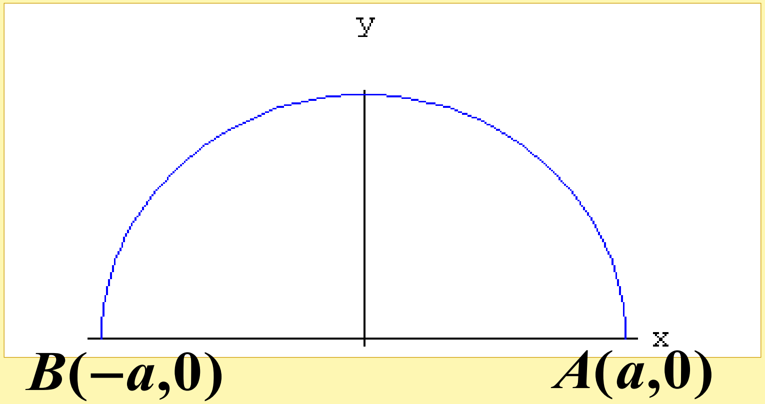
注意:曲线L关于x轴对称，被积函数xy关于y是奇函数，但积分不为0. 奇零偶倍不成立!

例2 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(1) 半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

解 (1) $\because \quad L:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases},$



θ 从 0 变到 π,

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta = -a^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$

$$= -2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta = -2a^3\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3.$$

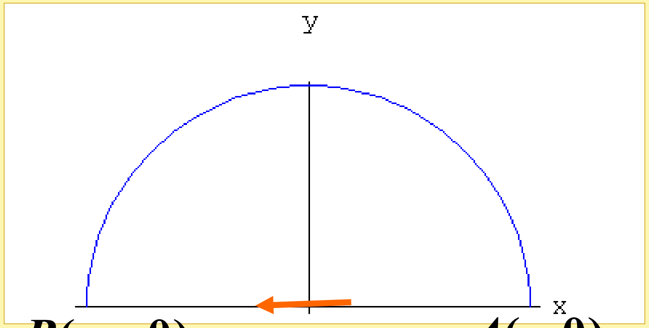
例2 计算$\int_L y^2 dx$,其中L为

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$ 的直线段.

(2) $\because \quad L: y = 0,$

x 从 a 变到 $-a$,

原式 $= \int_a^{-a} 0 dx = 0.$



$B(-a,0)$ $A(a,0)$

(1)和(2)的曲线L都关于y轴对称，被积函数关于x是偶函数，但积分结果一个是0，另外一个不为0

虽然被积函数相同，起点和终点也相同，但由于积分路径不同，结果不同.

教材 P123—例6

计算$\int_L 2xydx + x^2dy$,其中L为

(1) 抛物线 $y = x^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧.

(2) 有向折线OAB，这里O, A, B依次是点$(0,0)$ $(1,0),(1,1)$.

(3) 抛物线 $x = y^2$上从$O(0,0)$到$B(1,1)$的一段弧.

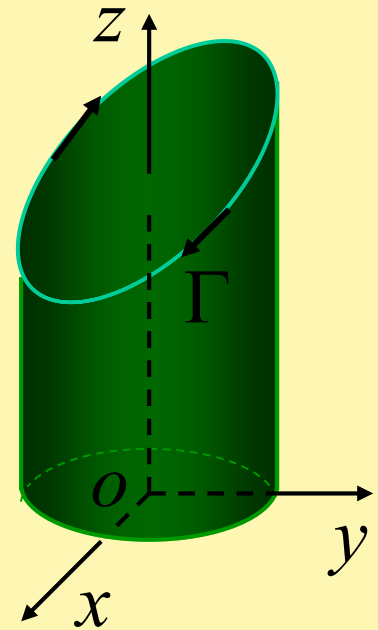
在这个例子中，被积函数相同，起点和终点也相同，虽然路径不同，但积分结果相同.

例3. 求 $I=\int_{\Gamma}(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中

$\Gamma\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程

$x=\cos t,\ y=\sin t,\quad z=2-\cos t+\sin t \quad (t:2\pi\to 0)$



$$\therefore \quad I=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=-2\pi$$

(4) 两类曲线积分之间的联系：

设有向曲线弧为 L： $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,

函数 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在以 a,b 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，
函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在L上连续。

L上点(x,y)处的切线向量$\vec{t}$的方向角为α,β,

则$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$

其中切向量$\vec{t}$的方向与L的方向一致。

（可以推广到空间曲线 Γ）

有向曲线弧为 L： $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$， t： $a \to b$

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

要求：有向曲线弧L的切向量 $\vec{t}$ 的方向与L的方向一致。

具体操作：若L的方向对应于参数 t增加的方向（即上式中 $a<b$ ），则 $\vec{t}=\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$

反之则 $\vec{t}=-\{\varphi'(t),\psi'(t)\}$

它的方向余弦为

$$\cos\alpha=\pm\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\quad \cos\beta=\pm\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

(当 t的变化范围$a<b$时取正号，　$a>b$时取负号)

证明：

当 $a<b$ 时，

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$= \int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

$$+ Q[\varphi(t),\psi(t)]\cdot\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\}\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b \{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

$$= \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

第一类曲线积分，下限小，上限大

当 $a > b$ 时，

$$\int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$$

$$= \int_b^a \{P[\varphi(t),\psi(t)] \cdot \frac{-\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} +$$

$$Q[\varphi(t),\psi(t)] \cdot \frac{-\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\} \cdot \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

$$= \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

有向曲线弧为 L： $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$， t： $a \to b$

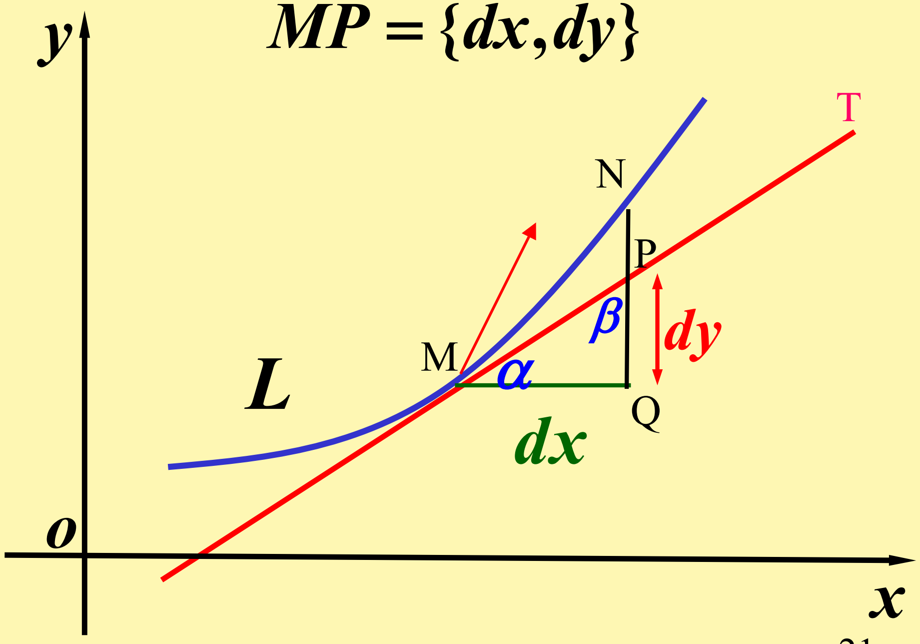
$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

$$= \int_L \{P,Q\}\cdot\{dx,dy\} = \int_L \{P,Q\}\{\cos\alpha,\cos\beta\}ds$$

$\overrightarrow{MP} = \{dx,dy\}$

$dx = \cos\alpha ds$,

$dy = \cos\beta ds$



空间曲线Γ在点(x, y, z)处的切向量的方向角为α, β, γ,

则$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

记 $\vec{A} = \{P, Q, R\}$, $\vec{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

Γ上点(x, y, z)处的单位切向量

用向量表示 $\int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{t}\,ds = \int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{s}$

有向曲线元 $d\vec{s} = \vec{t}ds$

$\{dx, dy, dz\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}ds$

例5　把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成对弧长的曲线积分，L：沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点(0，0)到点(2，0)

解：方法1：取 x 为参变量　$L: y=\sqrt{2x-x^2}$

起点对应x =0，终点x =2　$\because 0<2$

$$\therefore \vec{t}=\left\{1,\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right\}\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{(1-x)^2}{2x-x^2}}}=\sqrt{2x-x^2}$$

$$\cos\beta=1-x$$

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_L[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)]ds$$

例5　把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$化成对弧长的曲线积分，$L$：沿上半圆周$x^2 + y^2 = 2x$从点(0，0)到点(2，0)

方法2：$L: x = 1 + \cos\theta, y = \sin\theta,$

起点$\theta = \pi$，终点$\theta = 0$　$\because \quad \pi > 0$

$$\vec{t} = -\{\varphi'(\theta), \psi'(\theta)\} = \{\sin\theta, -\cos\theta\} = \{y, 1 - x\}$$

所以

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L [P(x,y)y + Q(x,y)(1-x)]ds$$

$$= \int_L [P(x,y)\sqrt{2x - x^2} + Q(x,y)(1-x)]ds$$